

Le Grand Théorème de Fermat
Livre 00 - Introduction
Version 2.0

Pascal Picard*

18 janvier 2010

*Je suis grand amateur de Mathématiques et de Physique Théorique, convaincu que ces sciences sont accessibles à tous, à condition de les expliquer progressivement et méthodiquement, et de les introduire par les prérequis nécessaires. Depuis quelques années, je m'attèle à écrire des textes théoriques sous forme de pièces de théâtre. Trois personnages y bavardent : Béatrix est la Candide, c'est elle qui pose les questions; Euristide est un peu philosophe, un peu physicien, il est l'intuitif du groupe; Mathine est notre mathématicienne, c'est elle qui présente les calculs et les démonstrations. Ces textes sont mis à disposition gratuitement sur Internet, parce que j'aime ça. Le prérequis pour la lecture des documents, quelque complexes qu'ils soient, est le programme de Terminale S en France.

à Pascale, Marine et Morgane

Remerciements... Ce document est en phase de relecture. Les relecteurs motivés recevront mes remerciements chaleureux.

Table des matières

Table des figures

Fig. 1 - Parcours vers le Grand Théorème de Fermat

6

EURISTIDE : Bonjour Béatrix. Comment vas-tu ?

BEATRIX : Bonjour à tous deux. Je viens vous voir parce que je voudrais comprendre la démonstration du Théorème de Fermat-Wiles tel qu'il a été démontré en 1993.

EURISTIDE : Vaste programme, Béatrix. C'est un voyage tentant et sûrement passionnant, parce que nous allons parcourir les nombreux domaines des mathématiques qui gravitent autour de la Théorie des Nombres moderne.

BEATRIX : Raison de plus pour s'y atteler. Etes-vous d'accord ?

EURISTIDE : D'accord. Mathine, es-tu prête ?

MATHINE : Allons-y. Le parcours sera long mais passionnant. Nous devons commencer par les bases de la Théorie des Nombres Classiques, contenu du Livre 01.

Puis, nous attaquerons l'Algèbre moderne, en commençant par la Théorie des Groupes dans le Livre 02.

Nous poursuivrons par la Théorie des Anneaux et des Corps, objet du Livre 03. Nous verrons à cette occasion les Anneaux Polynomiaux qui seront très importants pour notre compréhension du Théorème de Fermat-Wiles.

Il nous sera alors possible, sur ces bases, d'aborder dans le Livre 04 ce qu'on appelle l'Algèbre Linéaire, comportant l'étude des Espaces Vectoriels, des Applications Linéaires et des Matrices, ainsi que des Formes Multilinéaires et de leurs Déterminants.

Le Livre 05 nous plongera dans le monde de la Topologie, avec les Espaces Vectoriels Normés, la Convexité, les Espace Connexes, et les Espaces de Hilbert.

Nous posséderons alors les bases suffisantes pour comprendre le Livre 06 traitant de l'Analyse Complexe, incluant l'étude des Fonctions Analytiques, les Fonctions Holomorphes, les Intégrales Curvilignes, les Fonctions Méromorphes et le Théorème des Résidus.

Le Livre 07 aborde la Théorie de Galois, qui traite de façon générale les solutions d'équations algébriques sur un corps. Nous y aborderons les bases de la Théorie des Nombres Algébrique, les Homotopies, et la Théorie des Revêtements.

Dans le Livre 08, nous ferons le tour des Fonction Elliptiques, dont les Fonctions de Weierstrass.

Un gros morceau nous attend dans le Livre 09, avec la présentation de la Topologie Algébrique, introduisant de façon générale les Homotopies, les Revêtements, les CW-Complexes, l'Homologie et la Cohomologie.

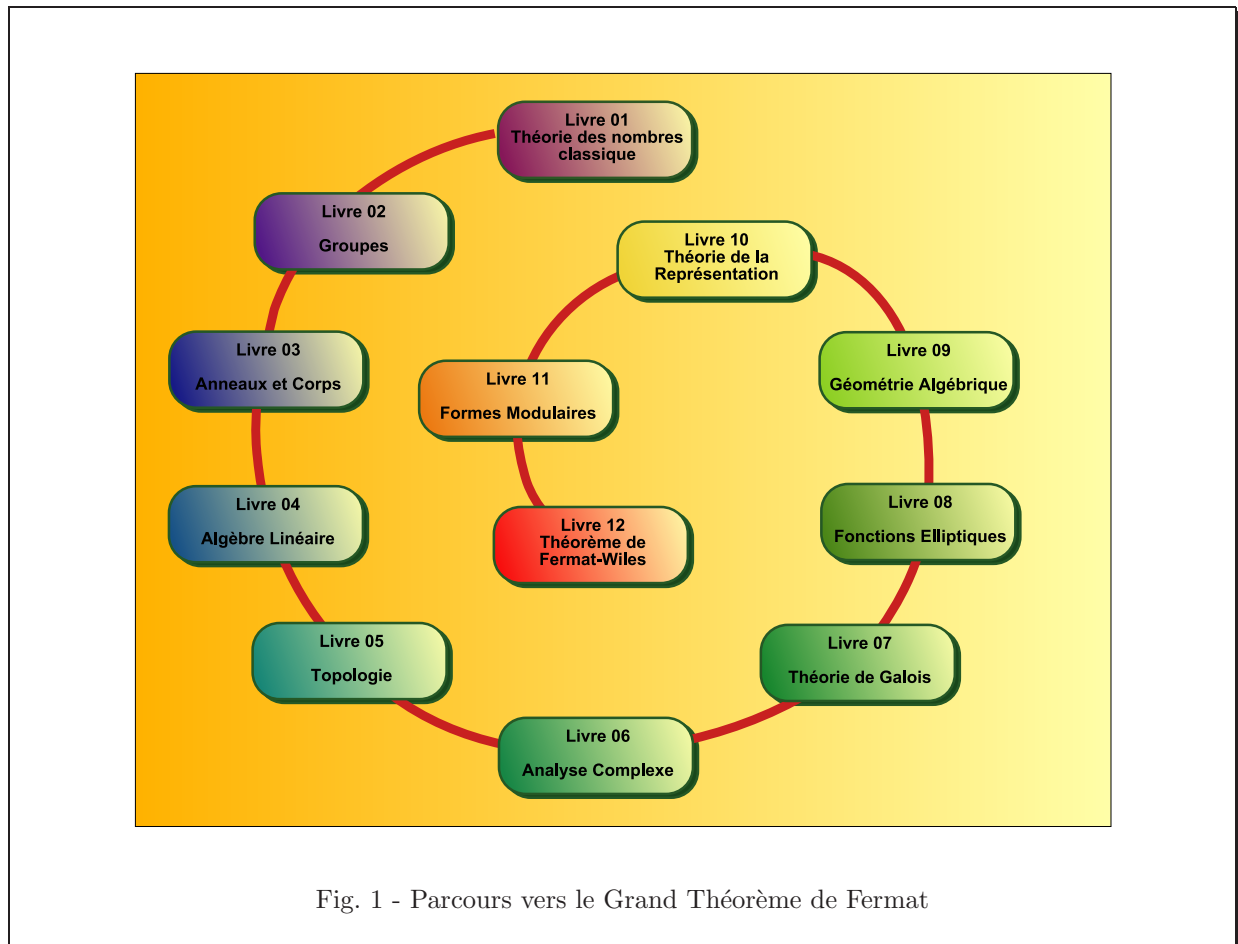
Forts de ces bases, nous pourrons étendre dans le Livre 09 nos connaissances avec la Géométrie Algébrique, nous présentant les Variétés Affines, les Variétés Projectives, la Théorie de la Dimension, la notion de Points Lisses et d'Applications Régulières Lisses. Nous aborderons aussi les Diviseurs sur une Variété Algébrique, les Faisceaux cohérents, leur Cohomologie, les Nombres d'Intersection, et les Faisceaux Inversibles Nefs et Amples. Nous concluerons par une présentation de la Cohomologie étale.

Le Livre 10 abordera la Théorie de la Représentation.

Et c'est dans le Livre 11 que nous pourrons comprendre ce que sont les Formes Modulaires, incluant l'étude des Courbes Modulaires Elliptiques, les Fonctions Modulaires, les Opérateurs de Hecke et les applications de ces notions à la géométrie arithmétique.

Et c'est grâce à l'ensemble de ce bagage que nous pourrons enfin dérouler dans le Livre 12 l'impressionnante démonstration du théorème de Fermat-Wiles.

EURISTIDE : Le petit schéma ci-dessous illustre ce généreux parcours :



BEATRIX : Impressionnant ! Alors, allons-y...

EURISTIDE : Nous allons commencer notre périple par un tour d'horizon de la théorie des nombres classique. Nous commencerons par ce domaine-ci, parce qu'il s'agit des bases historiques et intuitives de la théorie des nombres.

BEATRIX : C'est bien alléchant !